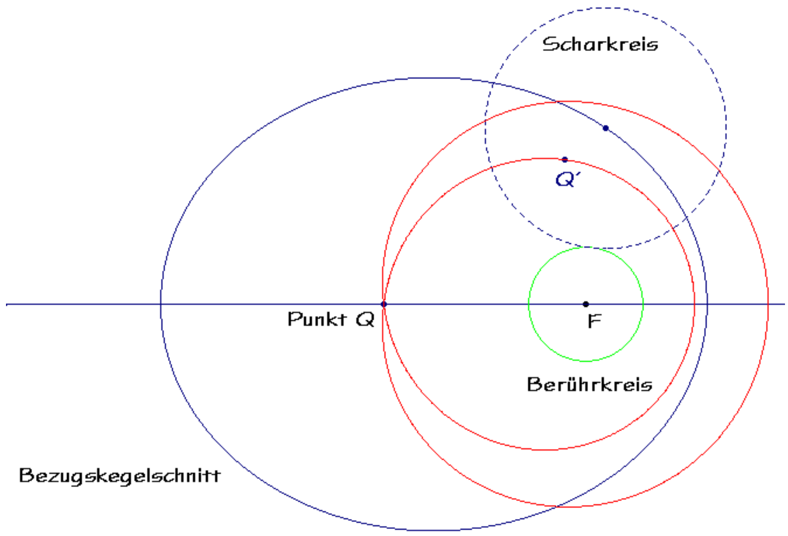
Höhere Kurven

– ein Konstruktionsprinzip –

Eckart Schmidt

Der Obertitel weist auf ein Buch hin von H. Schmidt [1], das eine Fülle von Erzeugungsweisen für Kurven höherer Ordnung enthält. Ergänzend wird hier ein Konstruktionsprinzip aufgezeigt, das viele bekannte Kurven – wie z.B. Zissoide, Strophoide, Trisektrix, Kardioide u.a. – als Spezialfälle erzeugt: Ausgehend von einem Kegelschnitt werden Kreise gezeichnet, deren Mittelpunkte auf dem Kegelschnitt liegen und die einen festen Kreis um einen Brennpunkt berühren. Spiegelt man jetzt einen Punkt der Hauptachse an den Kreisen dieser Schar, so erhält man als Ortslinie ein Beispiel der hier untersuchten Kurven. – Gearbeitet wird in kartesischen bzw. Polarkoordinaten.



Zwei Beispiele

Wählt man als Bezugskegelschnitt einen Kreis und lässt den Berührkreis zum Mittelpunkt dieses Kreises entarten, so haben die Scharkreise ihre Mitten auf der Kreislinie und einen gemeinsamen Punkt im Mittelpunkt des Bezugskreises. Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, legt den Ursprung in den Mittelpunkt F des Bezugskreises vom Radius p und gibt dem zu spiegelnden Punkt Q den Mittelpunktsabstand q, so liegen die an den Scharkreisen gespiegelten Punkte Q' auf einer Kurve mit der Polargleichung

$$(q^2 - r^2)^2 p^2 - (q^2 + r^2) q^2 r^2 + 2q^3 r^3 \cos\varphi = 0\,.$$

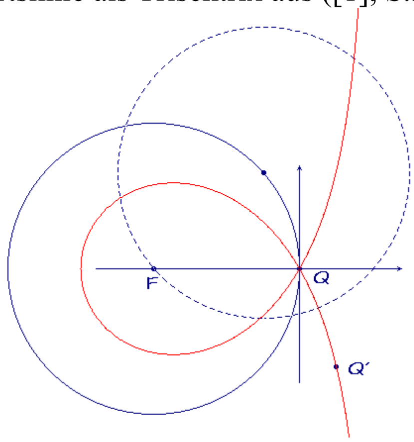
Die nicht unerheblichen computergestützten Herleitungen seien hier und weiterhin unterdrückt.
Legt man den Pol in den Punkt Q, so lässt sich die Gleichung besser interpretieren:

$$q^4 + r^2(q^2 - p^2) + 2qr(q^2 - 2p^2)\cos\varphi - 4q^2p^2\cos^2\varphi\,.$$

Für einen Punkt Q auf der Kreislinie mit dem Mittelpunktsabstand $q = p$ erhält die Gleichung die Form

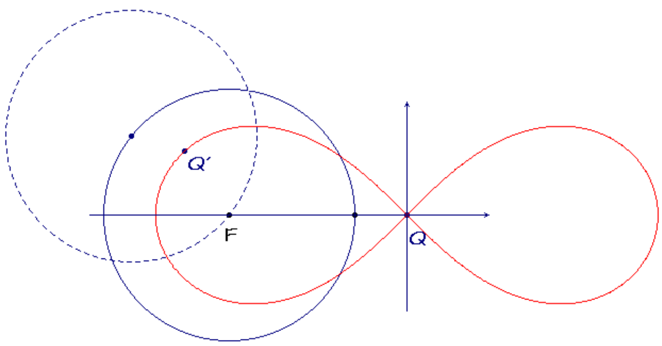
$$r = -\frac{p}{2}(4\cos\varphi - \sec\varphi)$$

und weist die Ortslinie als Trisektrix aus ([1], S.32).



Für einen Punkt Q mit dem Mittelpunktsabstand $q = \sqrt{2}p$ erhält man eine Lemniskate mit der Gleichung

$$r^2 = 4p^2(-1 + 2\cos^2\varphi)\,.$$

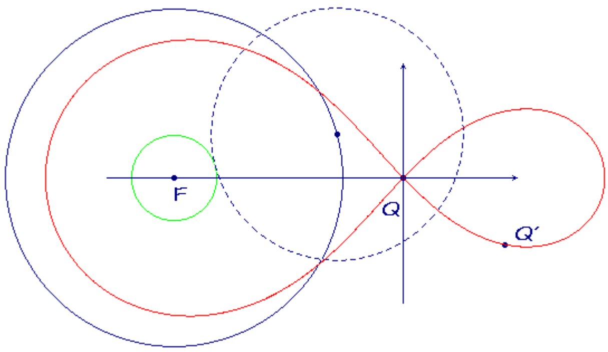


Bezugskegelschnitt Kreis

Bezugskegelschnitt sei wieder ein Kreis vom Radius p, ergänzt durch einen konzentrischen Berührkreis vom Radius $|\rho|$. Nun kann der Berührkreis die Scharkreise außen bzw. innen berühren; dies sei durch ein positives bzw. negatives Vorzeichen von ρ berücksichtigt. Der an den Scharkreisen zu spiegelnde Punkt Q habe vom gemeinsamen Mittelpunkt F wieder den Abstand q. Die Ortslinie der Spiegelpunkte erhält dann entsprechend die Polargleichung

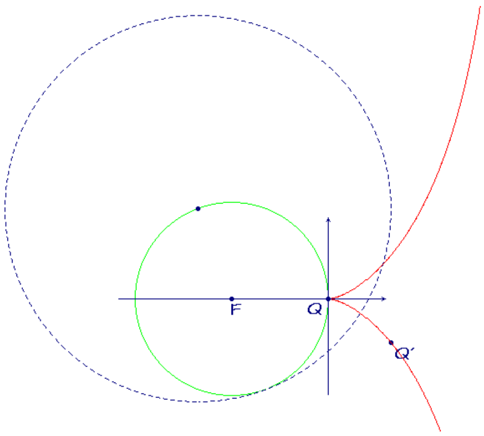
$$-(q^2 - 2p\rho + \rho^2)^2 + (p^2 - q^2)r^2$$
$$+ 2qr(2p^2 - 2p\rho - q^2 + \rho^2)\cos\varphi + 4q^2(p - \rho)^2\cos^2\varphi = 0\,,$$

wenn man den Pol in den Punkt Q legt.

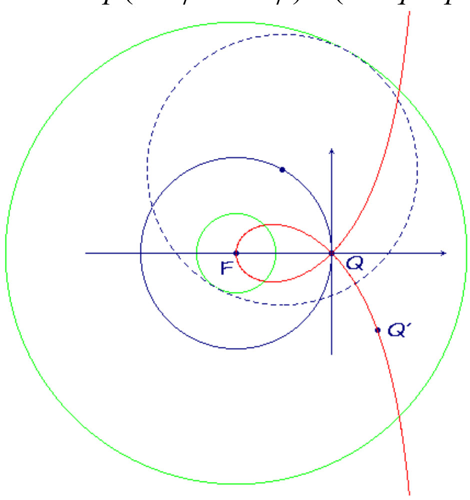


Für $q = 0$ ergeben sich offensichtlich Kreise um F mit dem Radius $\left|\frac{(2p-\rho)\rho}{p}\right|$, die für $\rho = 0$ punktförmig entarten.

Weitere Beispiele:



Zissoide: $r = -2p(\cos\varphi - \sec\varphi)$ (für $q = p$, $\rho = -p$)



Strophoide: $r = -p(2\cos\varphi - \sec\varphi)$ (für $q = p$, $\rho = (1 \pm \sqrt{2})p$)

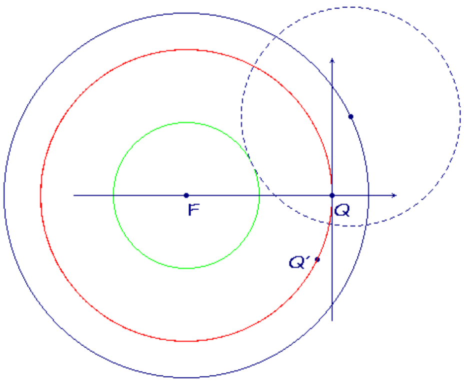
Ergänzt sei die Bedingung

$$2p\rho = q^2 + \rho^2 .$$

für doppelt belegte Kreise mit der Gleichung

$$r = -2q\cos\varphi .$$

Ein Beispiel:



Kreis: $r = -2q\cos\varphi$ (für $q = \frac{4p}{5} = 2\rho$)

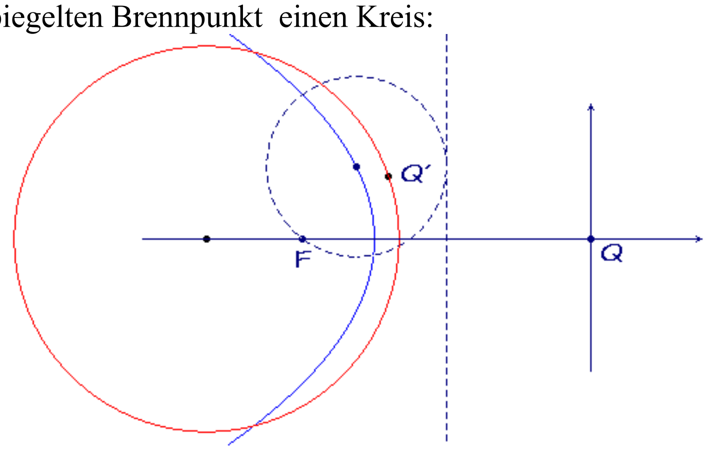
Bezugskegelschnitt Parabel

Die Parabel sei durch den Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie, d.h. durch den Halbparameter p gekennzeichnet. Der Punkt Q habe vom Brennpunkt F den gerichteten Abstand q (positiv, wenn Q mit dem Scheitelpunkt auf einer Seite des Brennpunktes liegt). Die Gleichungen der untersuchten Kurven werden in einem Koordinatensystem beschrieben, dessen Ursprung im Punkt Q liegt. Ihre Polarform ergibt sich zu

$$\begin{aligned}&-(q^2 - 2p\rho + 2q\rho + \rho^2)^2\\ &+ p(p-2q)r^2\\ &+ 2pr(2pq - 3q^2 - 2q\rho + \rho^2)\cos\varphi\\ &+ (2pq - q^2 - 2q\rho - \rho^2)^2\cos^2\varphi = 0\,.\end{aligned}$$

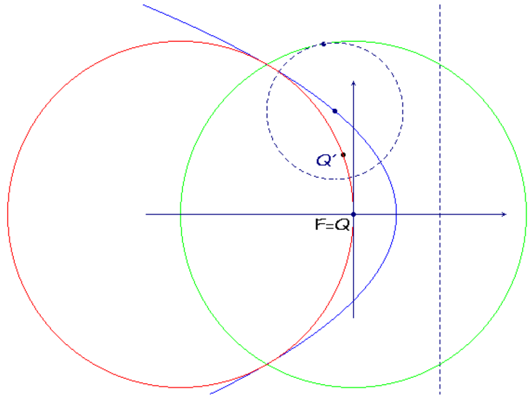
Die folgende Zusammenstellung von Beispielen wird erst vor dem Hintergrund einer allgemeinen Diskussion im nächsten Abschnitt verständlich.

$\boxed{\rho = 0}$ Lässt man den Berührkreis im Brennpunkt entarten, so ergibt die Kurve z.B. für den an der Leitlinie gespiegelten Brennpunkt einen Kreis:

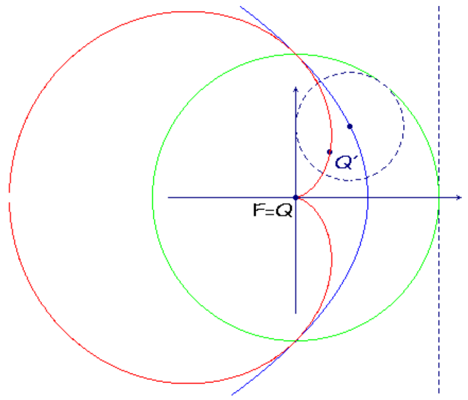


Kreis: $(x + \frac{8p}{3})^2 + y^2 - \frac{16p^2}{9} = 0$ (für $\rho = 0$, $q = 2p$)

$\boxed{q = 0}$ Legt man den Punkt Q in den Brennpunkt, so erhält man Pascalsche Schnecken, die für $\rho = 0$ punktförmig und für $\rho = 2p$ kreisförmig entarten; für $\rho = p$ ergibt sich der Spezialfall einer Kardioiden.

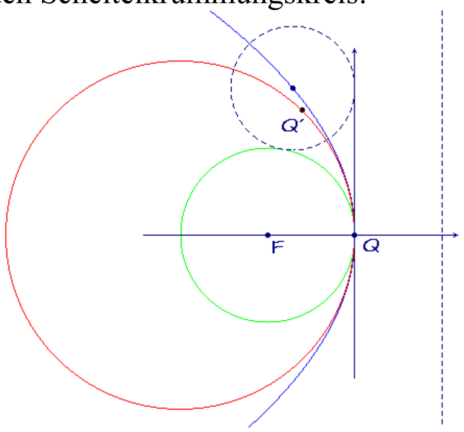


Kreis: $r = -4p\cos\varphi$ (für $q = 0$, $\rho = 2p$)



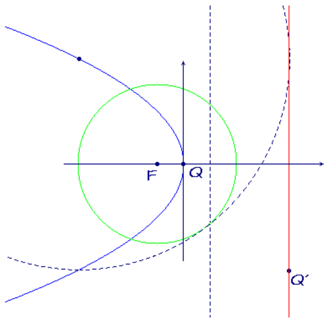
Kardioide: $r = p(\pm 1 - \cos\varphi)$ (für $q = 0$, $\rho = p$)

$\boxed{q = \frac{p}{2}}$ Legt man den Punkt Q in den Scheitelpunkt, so erhält man je nach Wahl des Berührkreises die verschiedensten Kurven, z.B. den Scheitelkrümmungskreis:



Kreis: $r = -2p\cos\varphi$ (für $q = \frac{p}{2} = \rho$)

Weitere Beispiele:



Gerade: $\quad x = 2p \quad$ (für $q = \frac{p}{2}$, $\rho = -\frac{3p}{2}$),

Zissoide: $\quad r = -\frac{p}{2}(\cos\varphi - \sec\varphi) \quad$ (für $q = \frac{p}{2}$, $\rho = -\frac{p}{2}$),

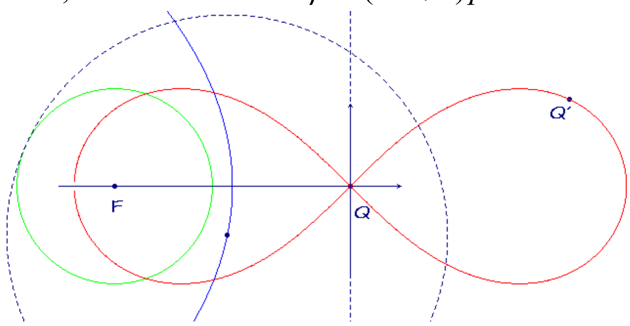
Strophoide: $\quad r = -2p(3 + 2\sqrt{2})(2\cos\varphi - \sec\varphi)$

(für $q = \frac{p}{2}$, $\rho = \frac{p}{2}(5 \pm 4\sqrt{2})$),

Trisektrix: $\quad r = -2p(4\cos\varphi - \sec\varphi) \quad$ (für $q = \frac{p}{2}$, $\rho = \frac{5p}{2}$),

Trisektrix: $\quad r = \frac{-2p}{9}(4\cos\varphi - \sec\varphi) \quad$ (für $q = \frac{p}{2}$, $\rho = -\frac{p}{6}$).

$\boxed{q = p}$ Legt man den Punkt Q in den Schnitt von Achse und Leitlinie, so erhält man für $\rho = (1 \pm \sqrt{2})p$ Lemniskaten:



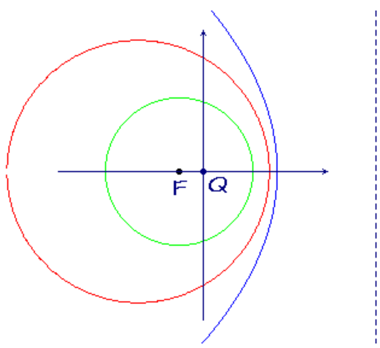
Lemniskate $\quad r^2 = 8(3 - 2\sqrt{2})p^2(-1 + 2\cos^2\varphi)$

(für $q = p$, $\rho = (1 - \sqrt{2})p$).

Interessiert man sich speziell für kreisförmige Entartungen, so liefert die Bedingung

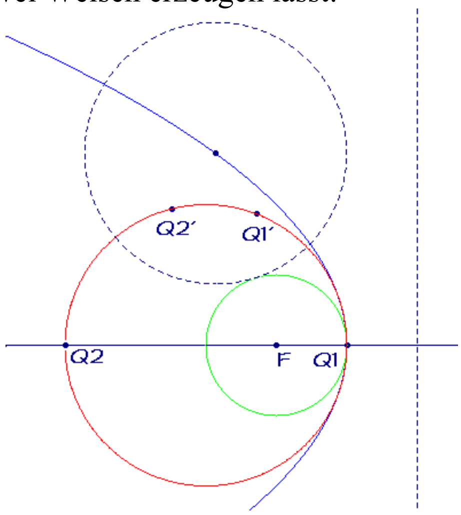
$$2pq = (q + \rho)^2$$

weitere Beispiele.



Kreis: $\quad (x + \frac{p}{3})^2 + y^2 = \frac{4p^2}{9} \quad$ (für $q = \frac{p}{8}$, $\rho = \frac{3p}{8}$)

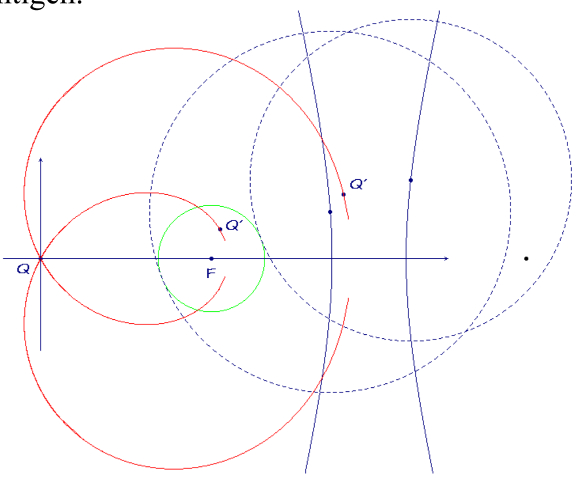
Abschließend sei angemerkt, dass sich der Scheitelkrümmungskreis mit einem Berührkreis durch den Scheitel auf zwei Weisen erzeugen lässt:



Kreis: $r = \mp 2p\cos\varphi$ (für $q = \frac{-p}{2} \pm p$, $\rho = \frac{p}{2}$)

Allgemeiner Bezugskegelschnitt

Nach den Bezugskegelschnitten Kreis und Parabel mit speziellen Beispielen sei jetzt eine allgemeingültigere Betrachtungsweise versucht. Dazu sei der Bezugskegelschnitt durch die Größen p und ε einer brennpunktsbezogenen Polargleichung $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ gekennzeichnet. Dabei wird bei der Hyperbel nur ein Ast erfasst. Liegen die Mitten der Scharkreise auf dem zweiten Hyperbelast, so ist ein entgegengesetztes Berührverhalten bzgl. des Berührkreises zu berücksichtigen.



Für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ müssen sich die Ergebnisse für Kreis und Parabel reproduzieren. Für $0 < \varepsilon < 1$ sind Ellipsen und für $1 < \varepsilon$ Hyperbeln Bezugskegelschnitte. Der gerichtete Abstand des Punktes Q vom Brennpunkt sei weiterhin q. Die Diskussion der Kurven erfolgt wieder in einem Koordinatensystem mit dem

Ursprung im Punkt Q. Die Gleichungen der Kurven haben dann die Struktur

$$k_1 + k_2 r^2 + k_3 r\cos\varphi + k_4\cos^2\varphi = 0$$

$$\text{mit } k_1 = -(q^2 - 2p\rho + 2q\varepsilon\rho + \rho^2)^2,$$

$$k_2 = (p - q - q\varepsilon)(p + q - q\varepsilon),$$

$$k_3 = 2(2p^2 q - q^3 - 3pq^2\varepsilon + q^3\varepsilon^2 - 2pq\rho + q\rho^2 + p\varepsilon\rho^2 - q\varepsilon^2\rho^2)$$

$$\text{und}\quad k_4 = (2pq - q^2\varepsilon - 2q\rho - \varepsilon\rho^2)^2.$$

Für diese Koeffizienten bestätigt man den Zusammenhang

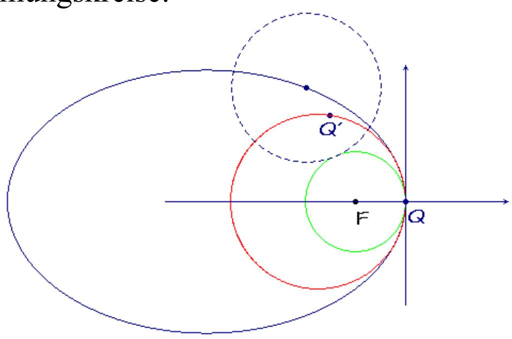
$$4q(q + 2p\varepsilon - q\varepsilon^2)k_1 - 4k_2 k_4 + k_3{}^2 = 0\ .$$

Eine Diskussion dieser Kurvengleichungen lässt sich vielleicht mit dem zweiten Koeffizienten beginnen, der für Q in einem der Scheitelpunkte Null wird.

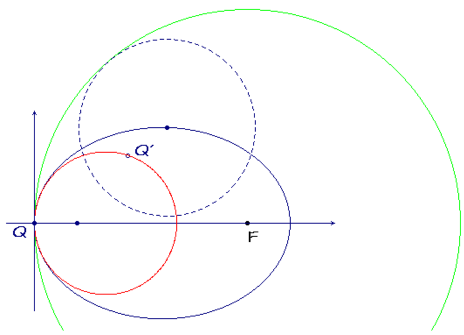
$\boxed{k_2 = 0}$ Legt man den Punkt Q in einen der Scheitelpunkte mit $q = \dfrac{p}{\pm 1 + \varepsilon}$, so wird k_2 gleich Null und die Kurvengleichung hat die Form

$$r = -\frac{k_4}{k_3}\cos\varphi - \frac{k_1}{k_3}\sec\varphi\,,$$

die für $k_4 = -k_1$ eine Zissoide, für $k_4 = -2k_1$ eine Strophoide und für $k_4 = -4k_1$ eine Trisektrix ergibt ([1], S.50). Für $k_4 = 0$ erhält man Geraden, für $k_1 = 0$ Kreise. Beispiele sind die Scheitelkrümmungskreise:



1. Scheitelkrümmungskreis: $r = -2p\cos\varphi$ (für $q = \dfrac{p}{1+\varepsilon} = \rho$)



2. Scheitelkrümmungskreis: $r = 2p\cos\varphi$ (für $q = \dfrac{p}{-1+\varepsilon} = -\rho$)

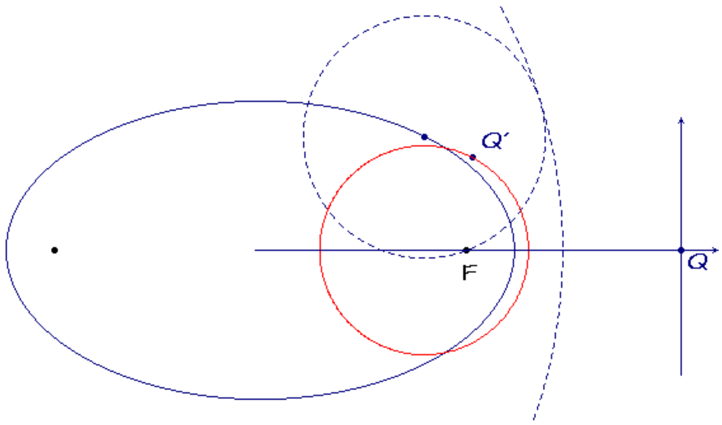
$\boxed{k_2 \neq 0, k_4 = 0}$ Legt man den Punkt Q nicht in einen Scheitel, so erhält man für

$$k_4 = 2q(p-\rho) - \varepsilon(q^2+\rho^2) = 0$$

Kreise mit den Gleichungen

$$(x + \frac{k_3}{2k_2})^2 + y^2 = \frac{k_3{}^2 - 4k_1k_2}{4k_2{}^2}.$$

Ein Beispiel: Dazu sei Q der am zweiten Leitkreis gespiegelte Brennpunkt mit $q = \frac{2p}{\varepsilon}$.



Kreis: $(x - \frac{8p}{(-4+\varepsilon^2)\varepsilon})^2 + y^2 = \frac{16p^2}{(-4+\varepsilon^2)^2}$ (für $q = \frac{2p}{\varepsilon}$, $\rho = 0$),

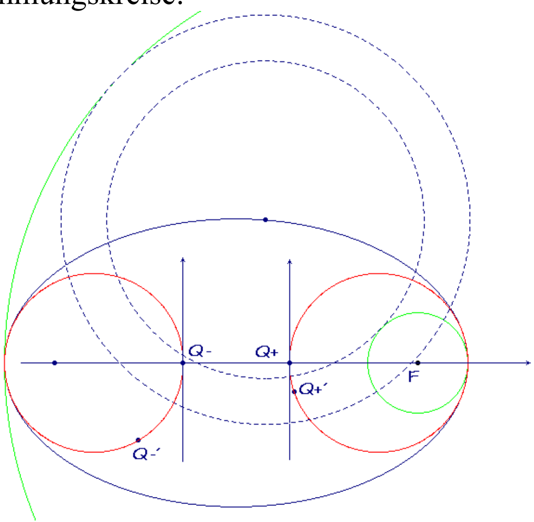
$\boxed{k_2 \neq 0,\ k_1 = 0}$ Legt man den Punkt Q nicht in einen Scheitel, so erhält man für

$$k_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2\rho(q\varepsilon - p) + (q^2+\rho^2) = 0$$

Kreise mit den Gleichungen

$$r = -\frac{k_3}{2k_2}\cos\varphi .$$

Beispiele sind die doppelt durchlaufenen Scheitelkrümmungskreise:

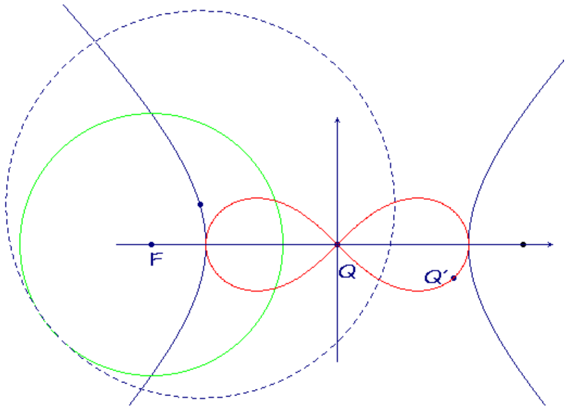


Kreise: $r = \pm 2p\cos\varphi$ (für $q = -\frac{p(1\pm 2\varepsilon)}{\pm 1+\varepsilon}$, $\rho = \frac{p}{1\pm\varepsilon}$).

$\boxed{k_2 \neq 0, k_4 \neq 0, k_1 \neq 0, k_3 = 0}$ In diesem Fall erhält man doppelsymmetrische Kurven mit den Gleichungen

$$r^2 = -\frac{1}{k_2}(k_1 + k_4 \cos^2\varphi),$$

die unter der zusätzlichen Bedingung $k_4 = -2k_1$ zu Lemniskaten entarten ([1], S.77). Ein Beispiel für eine gleichseitige Hyperbel:



Lemniskate: $r^2 = p^2(-1 + 2\cos^2\varphi)$
(für $\varepsilon = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}p$, $\rho = -p$).

$\boxed{k_2 \neq 0, k_4 \neq 0, k_1 \neq 0, k_3 \neq 0}$ Abschließend sei eine weitere Interpretationsmöglichkeit der Kurvengleichung aufgezeigt: Legt man den Punkt Q in einen der Brennpunkte, d.h. $q = 0$ oder $q = \dfrac{2p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}$, so erhält die Kurvengleichung unter Berücksichtigung des Koeffizientenzusammenhangs die Form

$$(2k_2 r + k_3 \cos\varphi)^2 + 4k_1 k_2 = 0,$$

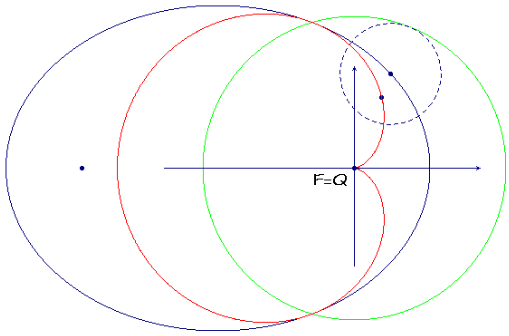
hinter der sich Pascalsche Schnecken verbergen ([1], S.125).
Für $q = 0$ haben die Pascalschen Schnecken die Gleichung

$$r = -\frac{\rho}{p}(\varepsilon\rho\cos\varphi \pm (2p - \rho)),$$

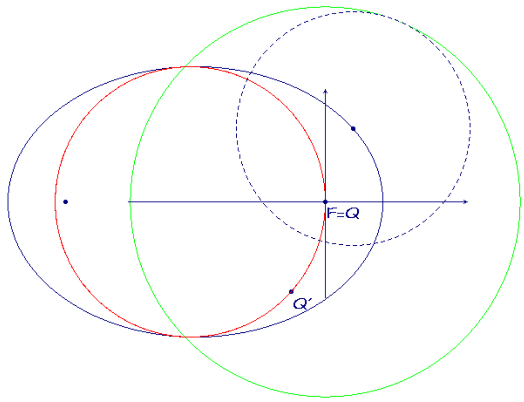
die für $\rho = \dfrac{2p}{\pm 1 + \varepsilon}$ Kardioiden und für $\rho = 2p$ doppelt durchlaufene Kreise ergeben.
Für $q = \dfrac{2p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}$ erhalten die Pascalschen Schnecken die Gleichung

$$r = \frac{2p - \rho + \varepsilon^2\rho}{p(-1+\varepsilon^2)^2}(\pm(2p\varepsilon^2 - \rho + \varepsilon^2\rho) + \varepsilon(2p - \rho + \varepsilon^2\rho)\cos\varphi),$$

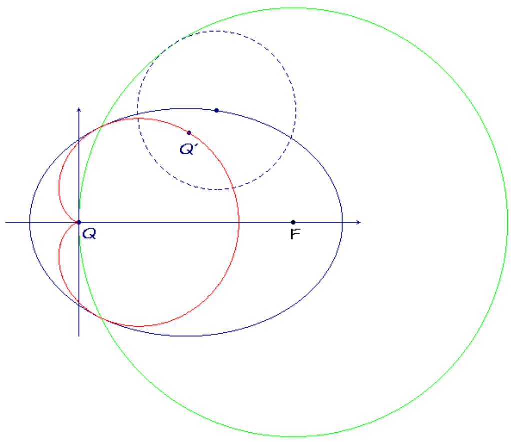
die für $\rho = \pm q$ Kardioiden und für $\rho = -\varepsilon q$ doppelt durchlaufene Kreise ergeben.
Beispiele:



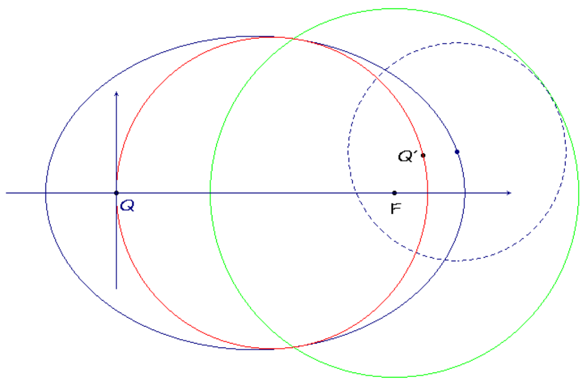
Kardioide: $r=-\dfrac{4p\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}(\pm 1+\cos\varphi)$ (für $q=0$, $\rho=\dfrac{2p}{1+\varepsilon}$)



Kreis: $r=-4p\varepsilon\cos\varphi$ (für $q=0$, $\rho=2p$)

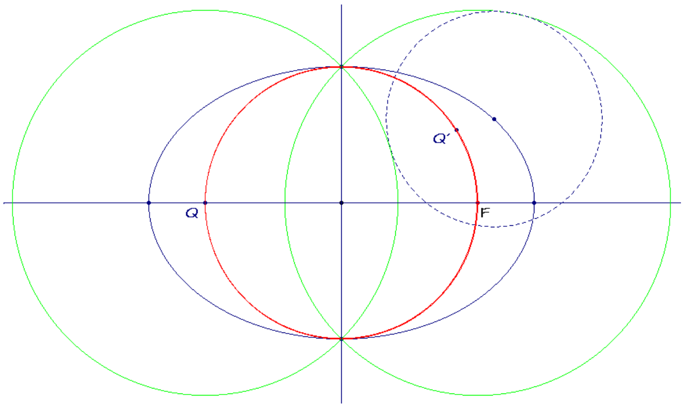


Kardioide: $r=\dfrac{4p\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}(\pm 1+\cos\varphi)$ (für $q=\dfrac{2p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}=-\rho$)



Kreis: $r=4p\varepsilon\cos\varphi$ (für $q=\dfrac{2p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$)

Mit einer symmetriereichen Konstellation für eine Ellipse mit der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sei abschließend ein vorläufiger Schlussstrich gezogen.



Literatur:

[1] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de